МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Л.С. Андрієвська

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи, підготовки до практичних занять та виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт з опору матеріалів

„ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ”

(*для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом 0921(6.060101) «Будівництво» з професійним спрямуванням „Промислове і цивільне будівництво”*)

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2009

Методичні вказівки до самостійної роботи, підготовки до практичних занять та виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт з опору матеріалів „Геометричні характеристики плоских перерізів” (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом 0921 (6.060101) «Будівництво» з професійним спрямуванням „Промислове і цивільне будівництво”) / Укл.: Л.С. Андрієвська – Харків: ХНАМГ, 2009 – 15с.

Укладач: Л.С. Андрієвська

Рецензент: д.т.н., проф. В.П. Шпачук

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 17 від 24.06.2009р.

Стержень є основним об'єктом, що його вивчають у курсі опору матеріалів.

Опір стержня різним видам деформації часто залежить не тільки від його матеріалу та розмірів, а й від обрису осі, форми поперечних перерізів та їх розташування. Тому необхідно визначати основні геометричні характеристики його поперечних перерізів, які чинять опір різним видам деформацій. До них належать площі поперечних перерізів, статичні моменти та моменти інерції.

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз стержня), зв'язану з координатними осями y, x (рис. l).

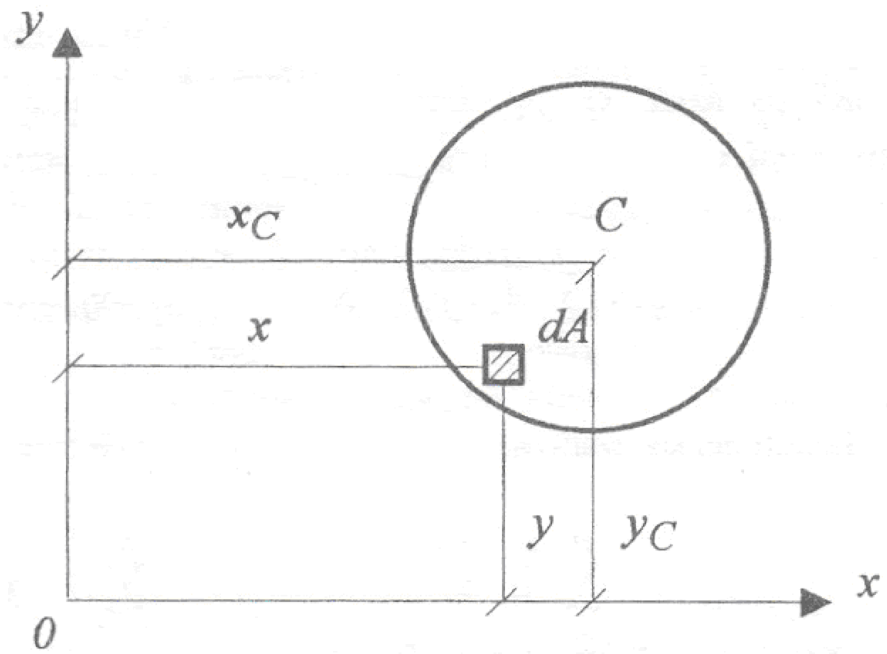

Рис. 1

Виділимо елемент площі dA з координатами x, y.

Статичний момент площі фігури відносно осей x, y визначається

$$S_x = \int_A y dA, \quad см^3, \qquad S_y = \int_A x dA, \quad см^3. \tag{1}$$

Позначимо x_C, y_C - координати центра ваги фігури. За аналогією з моментами сил відносно будь якої осі, можна записати статичні моменти площі фігури відносно осей x, y:

$$S_x = A \cdot y_C, \quad S_y = A \cdot x_C, \tag{2}$$

де A – площа фігури.

Звідси *координати центра ваги*

$$x_C = \frac{S_y}{A}, \quad x_C = \frac{S_y}{A}. \tag{3}$$

Із формул випливає, що статичні моменти площі відносно центральних осей, тобто осей, що проходять через центр ваги, дорівнюють нулю.

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини, для кожної з яких відомі площа A_i та координати центра ваги x_i, y_i. Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i. \tag{4}$$

Звідси легко знайти координати центра ваги складної фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}. \tag{5}$$

Осьовим моментом інерції площі фігури називають інтеграл добутків площ елементарних площадок, помножених на квадрати відстаней їх від осі, що лежить у площині фігури. Так, моменти інерції довільної фігури відносно осей x та y відповідно

$$I_x = \int_A y^2 dA, \;\; см^4, \qquad I_y = \int_A x^2 dA, \;\; см^4. \tag{6}$$

Осьові моменти інерції завжди додатні.

Відцентровим моментом інерції називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на відстані їх від осей x та y:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA, \quad см^4 . \tag{7}$$

Відцентровий момент інерції залежно від положення осей може бути додатним чи від'ємним або дорівнювати нулю.

Головними осями інерції називають осі, відносно яких відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю. Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди бувають її головними осями інерції.

Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають *головними центральними осями*.

Осьові моменти інерції стандартних прокатних профілів (кутових рівнобоких та нерівнобоких, двотаврових, швелерів) відносно центральних осей x, y наведено в таблицях сортаментів поряд із розмірами, площами перерізів, положеннями центрів ваги та іншими геометричними характеристиками.

Моменти інерції площі перерізу відносно довільної осі, паралельної центральній, визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} I_{x_I} &= I_x + b^2 \cdot A, \\ I_{y_I} &= I_y + a^2 \cdot A, \\ I_{x_I y_I} &= I_{xy} + a \cdot b \cdot A, \end{aligned} \tag{8}$$

де A - площа перерізу; a, b - відстані між центральною і довільною осями.

Зазначимо, що при визначені відцентрових моментів інерції треба врахувати знак координат a, b.

Відцентровий момент інерції рівнобокого кутника відносно його центральних осей, паралельних полкам, визначається за формулою:

$$I_{xy} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2},$$

де знак "+" приймається у тому разі, коли головну вісь інерції u, яка проходить через вершину кутника, для суміщення з центральною віссю х необхідно повернути на 45^0 проти годинникової стрілки.

Якщо головну вісь треба повернути за годинниковою стрілкою, у формулі приймається знак "-" (рис.2).

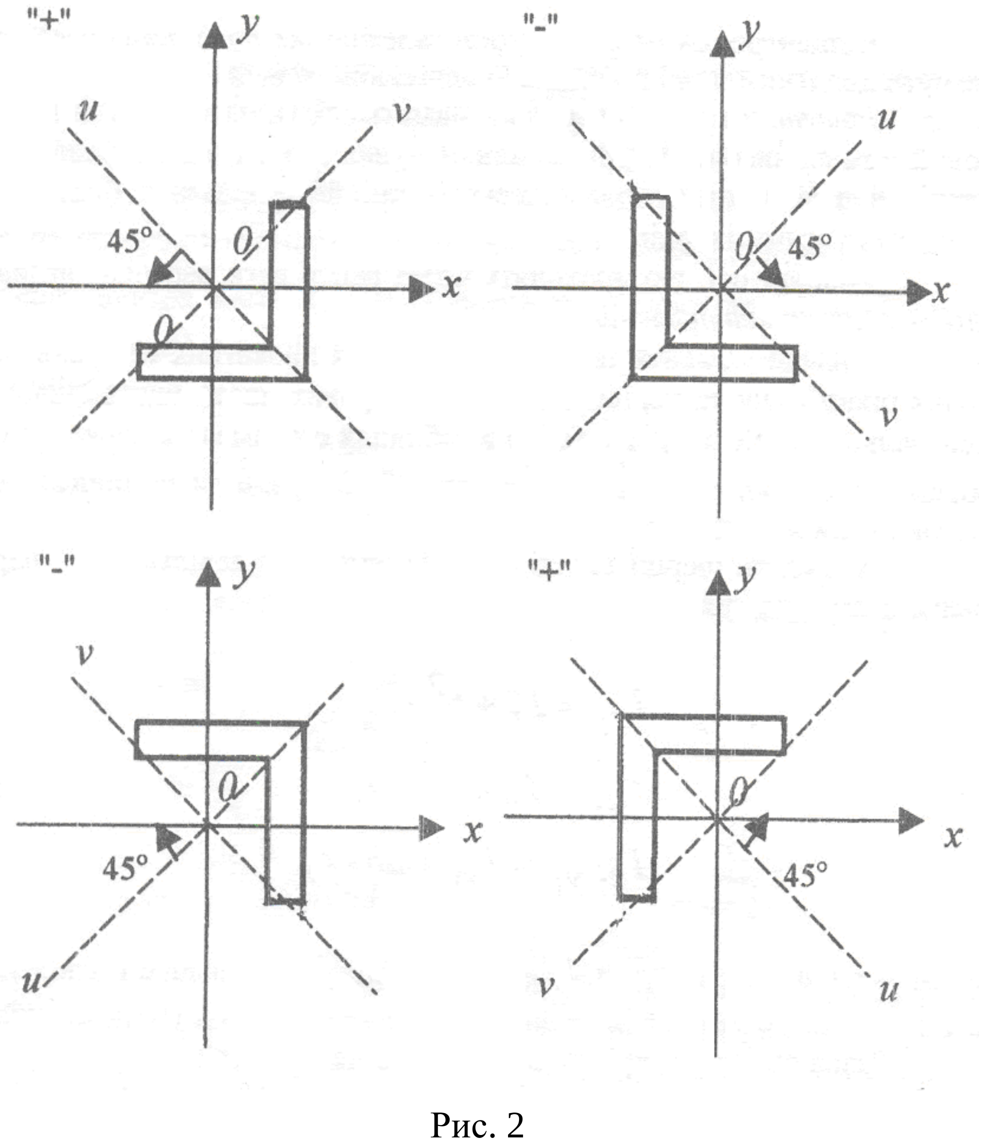

Рис. 2

Для визначення положення головних центральних осей u, v використовуємо формулу.

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \tag{10}$$

Головні моменти інерції перерізу визначаємо так:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}]. \tag{11}$$

Головні моменти інерції мають властивість екстремальності. Ураховуючи, що сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей - величина стала, можна зробити висновок, що відносно однієї з головних осей момент інерції має максимальне значення, а відносно іншої - мінімальне.

$$\begin{aligned} &I_u = I_{\max}, \qquad I_v = I_{\min} \\ &I_u + I_v = I_x + I_y = const. \end{aligned} \tag{12}$$

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів

Для заданого на рис.3 складного перерізу потрібно визначити положення центра ваги; величини осьових і відцентрового моментів інерції відносно центральних осей x_o, y_o; визначити напрям головних центральних осей u, v і величини головних моментів інерції: вихідні дані взяти з табл. l у відповідності з особистим шифром (три останні цифри номера залікової книжки студента).

Зміст завдання

1. Відповідно до заданого варіанту, користуючись табл. l і рис.3, накреслити у масштабі 1:2 складний плоский переріз, указати його лінійні розміри у літерах та числах. Виписати з таблиць сортаментів усі необхідні для подальшого розрахунку характеристики стандартних прокатних профілів, які складають заданий переріз.
2. Вибрати початкову систему координат (x_1, y_1). в якій визначити координати центра ваги складного перерізу x_C, y_C (5). Через знайдений центр ваги провести центральні осі x_o, y_o паралельні осям x_I, y_I.

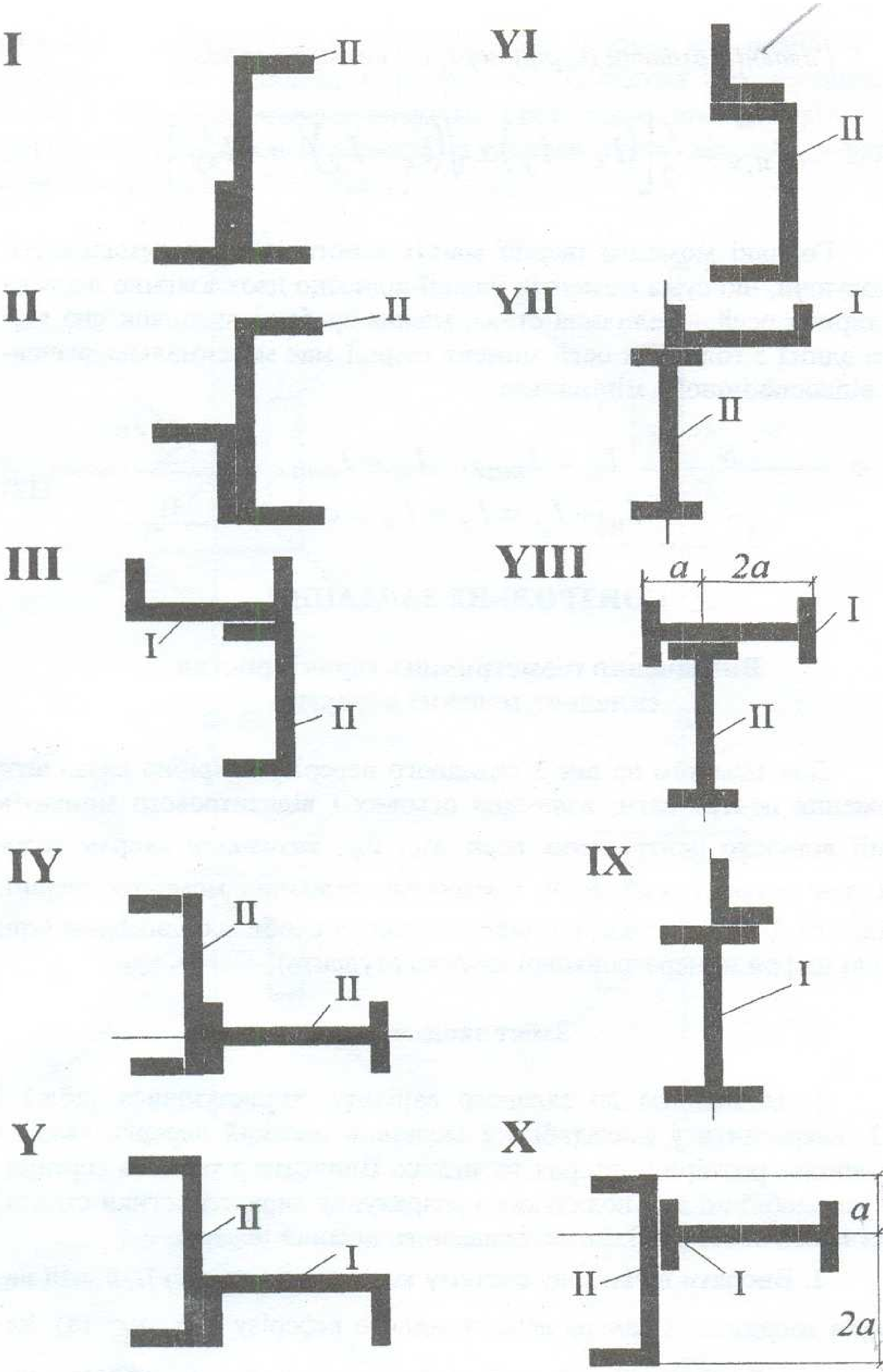
I
II
YI
II
II
II
YII
I
II
III
I
II
YIII
a
2a
I
II
IY
II
II
IX
I
Y
II
I
X
a
I
II
2a

Рис. 3

Таблиця 1

Вихідні дані до завдання

Третя цифра шифру	Номер схеми	Рівнобокий кутник	Друга цифра шифру	Номер швелера		Перша цифра шифру	Номер двотавра	
				I	II		I	II
1	**I**	**80x80x7**	**1**	**27**	**36**	**1**	**14**	**10**
2	**II**	**80x80x8**	**2**	**24a**	**33**	**2**	**16**	**12**
3	**III**	**90x90x8**	**3**	**22a**	**30**	**3**	**14**	**18**
4	**IY**	**90x90x9**	**4**	**27**	**22a**	**4**	**20a**	**16**
5	**У**	**90x90x8**	**5**	**20a**	**24**	**5**	**22a**	**16**
6	**YI**	**l00xl00x8**	**6**	**24a**	**22a**	**6**	**24a**	**18**
7	**YII**	**100xl00x10**	**7**	**27**	**20a**	**7**	**27**	**18**
8	**YIII**	**l00xl00x12**	**8**	**30**	**18a**	**8**	**30**	**16**
9	**IX**	**125x125x10**	**9**	**33**	**16**	**9**	**24**	**14**
0	**X**	**125x125x12**	**0**	**36**	**20**	**10**	**20**	**12**

3. Визначити осьові і відцентровий моменти інерції складного перерізу Відносно його центральних осей, користуючись формулами (8), (9).

4. Визначити положення головнях центральних осей інерції u, v за формулою (10). Провести осі u, v на рис.4.

5. Визначити величини головних моментів інерції складного перерізу за формулами (11), зробити перевірку (12).

Приклад виконання завдання

Швелер № 24 а	$A_I = 32{,}9$ см^2; $Ix_I = 3180$ см^4; $Iy_I = 254$ см^4; $h = 24$ см; $b = 9{,}5$ см; $d = 0{,}56$ см; $z^I{}_o = 2{,}67$ см
Кутник рівнобокий № 10	100x100x10; $A_2 = 19{,}2$см^2; $I_{X2} = I_{y2} = 179$ см^4 $z^{II}{}_o = 2{,}83$ см; $I_{max} = 284$ см^4; $I_{min} = 74{,}9$ см^4.

Складний поперечний переріз (швелер № 24а та рівнобокий кутник № 10) наведено у масштабі 1:2 на рнс.4. Розміри перерізу надані у сантиметрах. Основні характеристики прокатних профілів візьмемо із таблиць сортаментів.

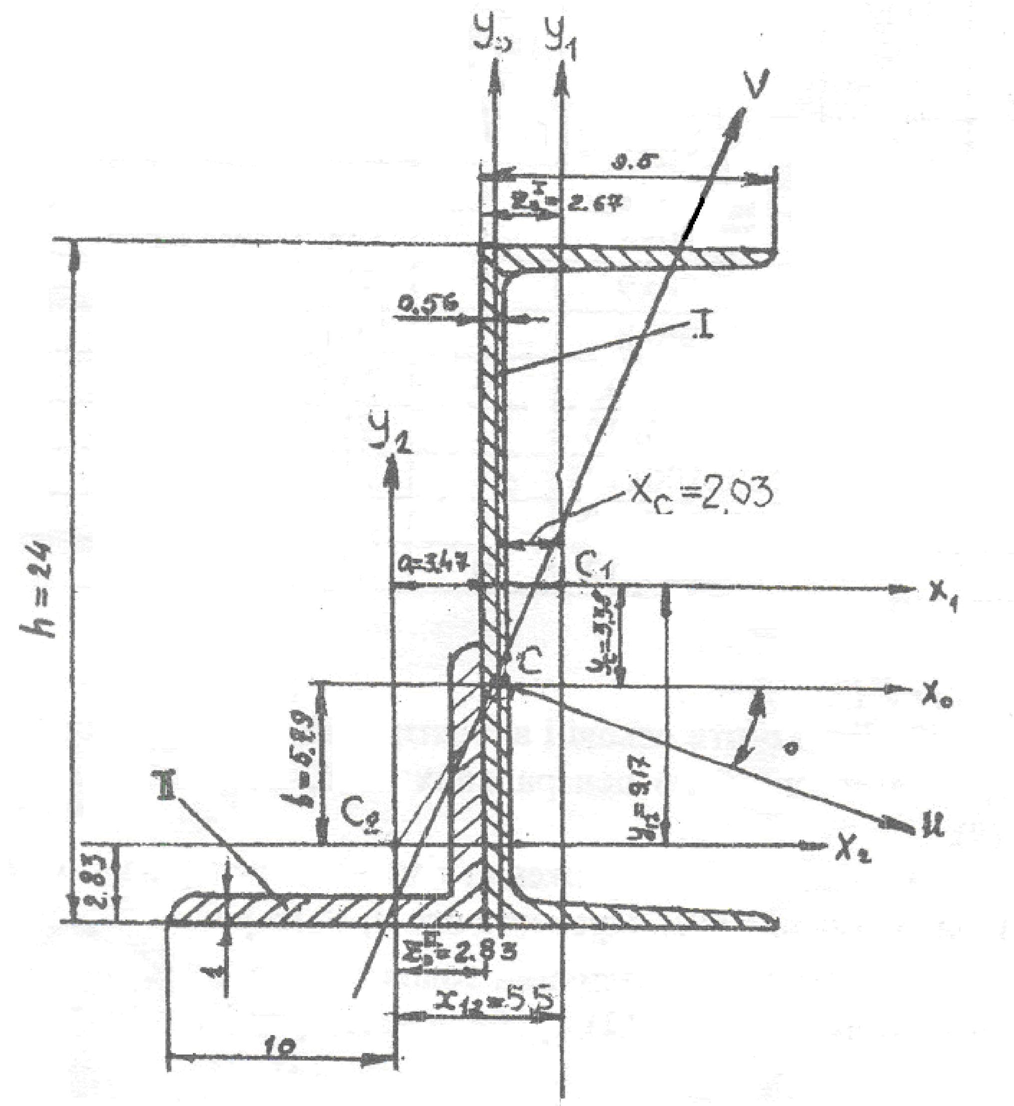

Рис.4

Положення центра ваги складного перерізу визначатимемо у системі координат x_I, y_I (центральні осі швелера):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{S_{Y_I}^{I} + S_{Y_I}^{II}}{A_1 + A_2} = \frac{A_2 \cdot x_{12}}{A_1 + A_2} = \frac{19{,}2 \cdot (-5{,}5)}{32{,}9 + 19{,}2} = -2{,}03\, см,$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{xi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{S_{X_I}^{I} + S_{X_I}^{II}}{A_1 + A_2} = \frac{A_2 \cdot y_{12}}{A_1 + A_2} = \frac{19{,}2 \cdot (-9{,}17)}{32{,}9 + 19{,}2} = -3{,}38\, см.$$

де x_{12} та y_{12} - відстані між осями y_1 - y_2 та x_1 - x_2 відповідно, у системі координат x_1, y_1, ці величини від'ємні.

$$x_{12} = z_o^I + z_o^{II} = 5{,}5\ см;\ y_{12} = \frac{h}{2} - z_o^{II} = 9{,}17\ см.$$

На рис.4 визначаємо положення центра ваги складного перерізу **С** {$\boldsymbol{x_C} = -2{,}03\ см;\ \boldsymbol{y_C} = -3{,}38\ см$} і накреслимо центральні осі x_o, y_o паралельні осям x_1, y_1. Позначимо на рис.4 відстані між осями x_o, y_o та x_2, y_2 відповідно a та b. З рис.4 знаходимо:

$$a = x_{12} - x_C = 5{,}5 - 2{,}03 = 3{,}47\ см;$$

$$b = y_{12} - y_C = 9{,}17 - 3{,}38 = 5{,}79\ см.$$

Подальший розрахунок виконуємо в системі координат x_o, y_o.

Визначимо осьові моменти інерції складного перерізу відносно центральних осей x_o, y_o.

$$I_{x_o} = I_{x_o}^{I} + I_{x_o}^{II} = (I_{x_1}^{I} + y_C^2 \cdot A_I) + (I_{x_2}^{II} + b^2 \cdot A_2) =$$

$$= (3180 + 3{,}38^2 \cdot 32{,}9) + (179 + 5{,}79^2 \cdot 19{,}2) = 4378\, см^4;$$

$$I_{y_o} = I_{y_o}^{I} + I_{y_o}^{II} = (I_{y_1}^{I} + x_C^2 \cdot A_I) + (I_{y_2}^{II} + a^2 \cdot A_2) =$$

$$= (254 + 2{,}03^2 \cdot 32{,}9) + (179 + 3{,}47^2 \cdot 19{,}2) = 801\, см^4;$$

Відцентровий момент інерції складного перерізу відносно осей x_o, y_o:

$$I_{x_o y_o} = I^{I}_{x_o y_o} + I^{II}_{x_o y_o} = (I^{I}_{x_1 y_1} + x_C \cdot y_C \cdot A_I) + (I^{II}_{x_2 y_2} + a \cdot b \cdot A_2);$$

$I^{I}_{x_1 y_1} = 0$, тому що вісь x_1 є віссю симетрії швелера.

Відцентровий момент інерції кутника відносно його центральних осей можна знайти за формулою:

$$I^{II}_{x_2 y_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2},$$ де $\boldsymbol{I}_{\max} = 284\ см^4$; $\boldsymbol{I}_{\min} = 74{,}9\ см^4$

максимальний та мінімальний моменти інерції кутника, наведені у таблиці сортаменту. Таким чином:

$$I^{II}_{x_2 y_2} = \frac{284 - 74{,}9}{2} = 104{,}55\ см^4.$$

Підставляємо у формулу для $I_{x_o y_o}$ усі величини, ураховуючи від'ємні значення відрізків a та b у системі координат x_o, y_o:

$$I_{x_o y_o} = 2{,}03 \cdot 3{,}38 \cdot 32{,}9 + [104{,}55 + (-3{,}47) \cdot (-5{,}79) \cdot 19{,}2] =$$

$$= 717{,}15\ см^4,$$

$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 717{,}15}{801 - 4378} = -0{,}4009,$$

$$2\alpha_0 = -21^0 50',\ \ \alpha_0 = -10^0 55' \approx = 11^0.$$

(Від'ємні кути α_o відкладаються від осі x_o за годинниковою стрілкою, а додатні - проти).

Відкладемо на рис.4 головні центральні осі складного перерізу u, v. Визначимо величини екстремальних моментів інерції складної фігури відносно головних центральних осей:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}[(I_{x_o} + I_{y_o}) \pm \sqrt{(I_{x_o} - I_{y_o})^2 + 4I_{x_o y_o}^2}\,] =$$

$$= \frac{1}{2}[(4378 + 801) \pm \sqrt{(4378 - 801)^2 + 4 \cdot 717{,}15^2}\,] =$$

$$= \frac{1}{2}[5179 \pm \sqrt{3577^2 + 4 \cdot 717{,}15^2}\,] =$$

$$= \frac{1}{2}[5179 \pm \sqrt{14852145}] = \frac{1}{2}[5179 \pm 3854],$$

звідки маємо:

$$I_u = I_{\max} = \frac{1}{2}[5179 + 3854] = 4516{,}5\ см^4,$$

$$I_v = I_{\min} = \frac{1}{2}[5179 - 3854] = 662{,}5\ см^4.$$

Перевірка:

$$I_{x_o} + I_{y_o} = I_u + I_v,$$
$$4378 + 801 = 4516{,}5 + 662{,}5;$$
$$5179 = 5179$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. - К: Вища школа, 1993.
2. Піскунов В.Г., Федоренко Ю.М., Шевченко В.Д. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. - К: Вища школа, 1994.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1970.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до самостійної роботи, підготовки до практичних занять та виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт з опору матеріалів „Геометричні характеристики плоских перерізів” (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом 6.060101 «Будівництво» з професійним спрямуванням „Промислове і цивільне будівництво”)

Укладач: Людмила Станіславівна Андрієвська

Відповідальний за випуск: В.П. Шпачук

Редактор: М.З. Аляб’єв

Верстка: І.В. Волосожарова

План 2009, поз. 242М ___

Підп. до друку 30.06.09	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн. - друк. арк. 0,6	Обл. - вид. арк. 0,9
Тираж 50 прим.	Зам. № _________	

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії при ЦНІТ ХНАМГ